

Primul test de selecție pentru OBM și OIM

Iași, 19 Aprilie 2006

Subiectul 1. Fie ABC și AMN două triunghiuri direct asemenea cu $AB = AC$ și $AM = AN$, având interioarele disjuncte. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului MAB . Demonstrați că punctele O, C, N, A sunt conciclice dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Subiectul 2. Fie p un număr prim, $p \geq 5$. Determinați numărul polinoamelor de forma

$$x^p + px^k + px^l + 1, \quad k > l, \quad k, l \in \{1, 2, \dots, p-1\},$$

care sunt ireductibile în $\mathbb{Z}[X]$.

Subiectul 3. Fie a, b numere naturale nenule astfel încât pentru orice număr natural n avem $a^n + n \mid b^n + n$. Demonstrați că $a = b$.

Subiectul 4. Se dau numerele reale a_1, a_2, \dots, a_n , astfel încât $|a_i| \leq 1$ pentru orice $i = 1, 2, \dots, n$ și $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$.

a) Arătați că există $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât

$$|a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k| \leq \frac{2k+1}{4}.$$

b) Să se arate că pentru $n > 2$ inegalitatea nu se poate îmbunătăți.

Timp de lucru: 4 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.